

$PG(2, 4)$ tiene algunas propiedades notables y necesitaremos un teorema de unicidad en los capítulos siguientes. En particular, demostraremos que existe un único plano proyectivo de orden 4.

1. Supongamos que $(X, \mathcal{L})$ es un plano proyectivo según la definición de la Sección 2.1 y que para alguna recta $l \in \mathcal{L}$ se cumple $|l| = n + 1$.
 - a) Muestra que toda recta tiene $n + 1$ puntos.
 - b) Muestra que todo punto pertenece a $n + 1$ rectas.
 - c) Deduce que hay $n^2 + n + 1$ puntos y $n^2 + n + 1$ rectas en total.

El número n se llama el orden del plano.

Demostración.

Definición. Un **plano proyectivo finito** es un conjunto finito X , junto con una familia $\mathcal{L}$ de subconjuntos de X , que satisfacen los siguientes tres axiomas:

- PP1.* Cada par de elementos distintos de X pertenece exactamente a un conjunto $l \in \mathcal{L}$.
- PP2.* La intersección de cada par de elementos distintos de $\mathcal{L}$ es un único elemento de X .
- PP3.* Existen al menos cuatro elementos de X con la propiedad de que ningún trío de ellos pertenece a un mismo elemento de $\mathcal{L}$.

Es costumbre llamar **puntos** a los elementos de X y **rectas** a los elementos de $\mathcal{L}$.

- a) Sea l_1 la recta que, por hipótesis, tiene $n + 1$ puntos y sea l_2 cualquier otra recta del plano con $l_2 \neq l_1$. Queremos probar que $|l_2| = n + 1$.
 Por (PP2), las rectas l_1 y l_2 se intersecan en un único punto; llamémoslo P . Además, por (PP3), existe un punto Q que no está en l_1 ni en l_2 .

- Justificar la existencia de Q

Consideremos los $n + 1$ puntos de l_1 ($P_0, P_1, \dots, P_n$). Para cada P_i en l_1 , la recta que pasa por Q y P_i es única por (PP1); denotémosla por m_i .

Las rectas $m_0, \dots, m_n$ son todas distintas. En efecto, si $m_i = m_j$ para $i \neq j$, entonces esa recta contendría a Q , P_i y P_j . Como P_i y P_j están en l_1 , se obtendría que $Q \in l_1$, contradiciendo la elección de Q .

Por (PP2), cada recta m_i corta a l_2 en un único punto. Denotemos $R_i = m_i \cap l_2$.

Los puntos $R_0, \dots, R_n$ son distintos. Si $R_i = R_j$ con $i \neq j$, entonces m_i y m_j se intersecarían tanto en Q como en R_i , contradiciendo (PP1).

Por tanto, l_2 contiene al menos $n+1$ puntos distintos $R_0, \dots, R_n$. No puede contener más. En efecto, si hubiese otro punto $R' \in l_2$, distinto de todos los R_i , entonces la recta que une Q y R' (única por (PP1)) cortaría a l_1 (por (PP2)) en un punto P_i y dicha recta coincidiría con m_i , implicando $R' = R_i$. Esto es imposible, así que $|l_2| = n+1$.

- b) Sea P un punto cualquiera de X . Queremos contar cuántas rectas pasan por P .

Por (PP3), existe al menos una recta l que no pasa por P y tiene exactamente $n+1$ puntos $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$.

- Justificar por que existe l que no pasa por P

Para cada $Q_i \in l$, llamemos m_i a la recta que pasa por P y Q_i .

Las rectas $m_0, \dots, m_n$ son todas distintas. En efecto, si $m_i = m_j$ para $i \neq j$, entonces esa recta contendría a P , Q_i y Q_j . Como $Q_i, Q_j \in l$, se tendría que $P \in l$, contradiciendo la elección de l .

Por lo tanto, hay al menos $n+1$ rectas que pasan por P . Veamos que no puede haber más. Si m' fuera otra recta que pasa por P , entonces por (PP2) la recta m' cortaría a l en un único punto, que tendría que ser alguno de los Q_i . Pero la recta que pasa por P y Q_i es m_i , así que $m' = m_i$, lo cual contradice que m' fuera nueva. Por tanto, exactamente $n+1$ rectas pasan por P .

- c) Tomemos un punto fijo $P \in X$. Por P pasan exactamente $n+1$ rectas, que denotamos por $m_0, m_1, \dots, m_n$.

Por (a), cada recta m_i contiene $n+1$ puntos. El punto P está en todas ellas, así que en cada m_i hay n puntos distintos de P .

Mostremos que los conjuntos de n puntos $m_i \setminus \{P\}$ son disjuntos. Si un punto $Q \neq P$ perteneciera a m_i y m_j con $i \neq j$, entonces m_i y m_j compartirían los dos puntos P y Q , contradiciendo (PP1).

De aquí se deduce que al menos existen

$$1 + (n+1) \cdot n = n^2 + n + 1,$$

donde el 1 corresponde a P y el término $(n+1) \cdot n$ a los puntos restantes en las rectas que pasan por P .

Además no pueden existir más puntos debido a que si hubiera otro, debería pasar una recta por este y por P pero ya todas estas rectas fueron tomadas en cuenta.

De manera análoga, tomemos una recta cualquiera l que contiene $n+1$ puntos $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$.

Por cada Q_i pasan exactamente $n+1$ rectas. La recta l pasa por todos los Q_i . En cada punto Q_i hay n rectas distintas de l , de modo que por cada Q_i contamos n rectas adicionales.

De nuevo, estos conjuntos de n rectas son disjuntos: si una recta $m \neq l$ pasara por Q_i y Q_j con $i \neq j$, entonces m y l se intersecarían en dos puntos distintos, contradiciendo (PP2).

Por lo tanto, el número total de rectas es

$$1 + (n + 1) \cdot n = n^2 + n + 1,$$

donde el 1 corresponde a l y el término $(n + 1) \cdot n$ a las demás rectas que pasan por los puntos de l .

De manera análoga a los puntos sabemos que no existen rectas que no hayan sido contadas.

□

2. Un hipérovalo en un plano proyectivo de orden n es un conjunto de $n + 2$ puntos, de forma que no tres de ellos son colineales. Muestra que toda recta de un plano proyectivo de orden n corta a un hipérovalo en 0 o 2 puntos.

Demostración. Sea H un hipérovalo y sea l una recta cualquiera del plano. Definamos $k := |l \cap H|$.

Primero, veamos que $k < 3$. Todos los puntos de $l \cap H$ están en la recta l . Si $k \geq 3$, habría al menos tres puntos de H colineales, lo cual contradice la definición de hipérovalo. Por lo tanto, $k < 3$, es decir, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Supongamos que existe una recta l que intersecta al hipérovalo H en exactamente un punto P , es decir, $k = 1$.

Por el inciso anterior, por P pasan exactamente $n + 1$ rectas. Las denotamos por

$$l, m_1, m_2, \dots, m_n.$$

Sean $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$ los $n + 1$ puntos de H que no están en l . Para cada j , la recta que une P con Q_j es única y es distinta de l . Por tanto, cada Q_j pertenece a alguna de las rectas m_i .

Como hay $n + 1$ puntos Q_j y sólo n rectas m_i , existe al menos una recta m_k que contiene a dos puntos distintos Q_a y Q_b de H .

La recta m_k contiene entonces a los puntos P , Q_a y Q_b . Por tanto, P, Q_a, Q_b son colineales. Pero estos tres puntos pertenecen al hipérovalo H , lo cual contradice que H no tiene tres puntos colineales.

Esta contradicción muestra que no puede ocurrir el caso $k = 1$. En consecuencia, toda recta del plano intersecta al hipérovalo H en 0 o 2 puntos. □

3. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 cuatro puntos (ninguno de ellos tres colineales) en un plano proyectivo de orden 4 y sea l_{ij} la recta determinada por P_i y P_j . Muestra que existen exactamente dos puntos P_5 y P_6 que no están en ninguna de las rectas l_{ij} y que el conjunto

$$H = \{P_1, P_2, \dots, P_6\}$$

es un hipérovalo.

Demostración. Por el inciso 1, para $n = 4$ tenemos:

- Puntos por recta: $n + 1 = 5$.
- Rectas por punto: $n + 1 = 5$.
- Puntos totales: $n^2 + n + 1 = 16 + 4 + 1 = 21$.
- Rectas totales: $n^2 + n + 1 = 21$.

Sea $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Las rectas $l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{24}, l_{34}$ son todas distintas, pues si $l_{ij} = l_{jk}$ con $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces P_i, P_j, P_k serían colineales, contradiciendo la hipótesis. Clasificamos los puntos del plano según cuántas de estas rectas pasan por ellos:

- **Puntos en 3 rectas.** El punto P_1 está en las rectas l_{12}, l_{13}, l_{14} y análogamente ocurre con P_2, P_3, P_4 . En total hay 4 puntos de este tipo.
- **Puntos en 2 rectas.** Sean $P_7 = l_{12} \cap l_{34}$, $P_8 = l_{13} \cap l_{24}$ y $P_9 = l_{14} \cap l_{23}$. Estos tres puntos no pertenecen a A (cada uno es colineal con un par distinto de puntos de A). En total hay 3 puntos de este tipo.
- **Puntos en 1 recta.** Cada una de las 6 rectas l_{ij} tiene 5 puntos. Por ejemplo, l_{12} contiene a P_1, P_2, P_7 , así que tiene 2 puntos adicionales que no están en A ni entre P_7, P_8, P_9 . De manera análoga, cada una de las 6 rectas aporta 2 puntos de este tipo y cada uno de estos puntos está en una única recta de la familia $\{l_{ij}\}$. Por tanto, hay $6 \cdot 2 = 12$ puntos de este tipo.

En total, hemos contabilizado $4 + 3 + 12 = 19$ puntos, pero el plano tiene 21 puntos. Por lo tanto, existen exactamente dos puntos que no están en ninguna de las rectas l_{ij} ; los denotamos por P_5 y P_6 .

Veamos ahora que ninguna recta l del plano puede contener tres (o más) puntos de H .

- Si l contiene tres puntos P_i, P_j, P_k con $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, esto contradice la hipótesis inicial de que ningún trío de puntos de A es colineal.
- Si l contiene dos puntos P_i, P_j de A y además P_5 o P_6 (con $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$), entonces la recta que pasa por P_i y P_j es precisamente l_{ij} y ya sabemos que P_5 y P_6 no pertenecen a ninguna de las rectas l_{ij} , lo cual es una contradicción.
- Si l contiene P_i, P_5, P_6 con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, consideremos las rectas que pasan por P_5 y un punto de A . Hay exactamente cuatro rectas que intersecan a A en un solo punto y que pasan por P_5 , una por cada $P_i \in A$ y además una recta externa (que no contiene puntos de A). Lo mismo sucede con P_6 . La recta l_{56} es la recta externa común a P_5 y P_6 , de modo que ninguna recta que contenga a P_5 y P_6 puede contener además un punto de A .

De esta manera, toda recta contiene a lo más dos puntos de H y como $|H| = 6 = 4 + 2$, se tiene que H es un hipérovalo. $\square$

4. Sea X el conjunto de puntos de un plano proyectivo de orden 4 y sea H un hipérovalo. Muestra que, para cada punto $P \in X \setminus H$, existe una partición de H en tres pares (determinada por las rectas que pasan por P) y que cada una de esas particiones ocurre.

Demostración. En el inciso 2 se probó que toda recta del plano intersecta a H en 0 o 2 puntos. Como el plano es de orden 4, por el inciso 1 tenemos $|X| = 21$ y, al ser H un hipérovalo, $|H| = 6$. Por lo tanto, hay

$$|X \setminus H| = 21 - 6 = 15$$

puntos externos a H y sabemos que por cada uno de ellos pasan exactamente 5 rectas.

Clasifiquemos estas 5 rectas según el número de puntos en que cortan a H . Para un punto fijo $P \in X \setminus H$, sea s el número de rectas que cortan a H en 2 puntos (secantes) y e el número de rectas que no cortan a H (externas). Entonces

$$s + e = 5$$

y, como H tiene 6 puntos y cada secante aporta exactamente 2 puntos de intersección, se cumple también

$$2s = 6.$$

De aquí obtenemos $s = 3$ y $e = 2$. Es decir, por cualquier punto P fuera de H pasan 3 secantes a H y 2 rectas externas.

Denotemos estas secantes por l_1, l_2, l_3 . Sus intersecciones con H son pares de puntos:

$$l_1 \cap H = \{Q_1, Q_2\}, \quad l_2 \cap H = \{Q_3, Q_4\}, \quad l_3 \cap H = \{Q_5, Q_6\}.$$

Las rectas l_1, l_2, l_3 sólo se intersecan en P , así que los pares $\{Q_1, Q_2\}$, $\{Q_3, Q_4\}$ y $\{Q_5, Q_6\}$ son disjuntos y su unión es H . En consecuencia, las secantes que pasan por P determinan una partición de H en tres pares.

Contemos ahora cuántas particiones de este tipo existen. El número de maneras de dividir un conjunto de 6 elementos en 3 pares no ordenados es

$$\frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{3!} = 15.$$

Por un lado, tenemos 15 puntos externos a H y por otro lado, 15 particiones posibles de H en tres pares.

Supongamos que dos puntos distintos $P, P' \in X \setminus H$ generan la misma partición

$$\{\{Q_1, Q_2\}, \{Q_3, Q_4\}, \{Q_5, Q_6\}\}.$$

Entonces, para P , las secantes correspondientes son las rectas que pasan por los pares $\{Q_1, Q_2\}$, $\{Q_3, Q_4\}$ y $\{Q_5, Q_6\}$ y lo mismo ocurre para P' . En particular, las rectas que pasan por Q_1 y Q_2 deben ser la misma para P y para P' y lo mismo con los otros dos pares. Esto implicaría que P y P' pertenecen simultáneamente a dos secantes distintas, lo cual no puede suceder debido a $(PP1)$. Por tanto, P y P' no pueden determinar la misma partición.

Concluimos que cada punto de $X \setminus H$ determina una partición distinta de H en tres pares y como hay exactamente tantas particiones como puntos externos, cada partición posible aparece. $\square$

5. Sean $(X_i, \mathcal{L}_i)$, con $i = 1, 2$, dos planos proyectivos de orden 4 que contienen los hipérovales H_i . Muestra que toda correspondencia uno a uno $H_1 \leftrightarrow H_2$ puede extenderse a una correspondencia uno a uno $X_1 \leftrightarrow X_2$ que hace corresponder $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_2$. Deduce que todo plano de orden 4 es isomorfo (en el sentido usual) a $PG(2, 4)$.

Demostración. Sea $f : H_1 \rightarrow H_2$ una biyección. Definimos $F : X_1 \rightarrow X_2$ como sigue:

- a) Para cualquier punto $P \in H_1$, definimos $F(P) = f(P)$.
- b) Si $P \in X_1 \setminus H_1$, por el inciso 4 el punto P determina una partición única de H_1 en tres pares:

$$\{\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}\}.$$

Aplicando f a cada punto de H_1 , obtenemos una partición de H_2 :

$$\{\{f(A), f(B)\}, \{f(C), f(D)\}, \{f(E), f(F)\}\}.$$

Por el inciso 4, esta partición de H_2 corresponde a un único punto $Q \in X_2 \setminus H_2$. Definimos entonces $F(P) = Q$.

La aplicación F está bien definida para todos los puntos de X_1 . Además, si $P, P' \in X_1$ son distintos, entonces determinan particiones distintas de H_1 , que al aplicar f producen particiones distintas de H_2 . Por el inciso 4, estas particiones corresponden a puntos distintos en X_2 , de modo que $F(P) \neq F(P')$. Esto muestra que F es inyectiva.

Mostremos ahora que F envía rectas en X_1 a rectas en X_2 .

- Si $|l_1 \cap H_1| = 2$, sea

$$l_1 = \{A, B, P_1, P_2, P_3\},$$

donde $A, B \in H_1$ y $P_i \in X_1 \setminus H_1$. En el segundo plano, los puntos $f(A), f(B) \in H_2$ determinan una única recta secante a H_2 , que denotamos por l_2 .

Sea $Q_1 = F(P_1)$. Por construcción, la partición asociada a P_1 contiene el par $\{A, B\}$, así que la partición asociada a Q_1 contiene el par $\{f(A), f(B)\}$ y por el inciso 4, esto significa que Q_1 está sobre la recta determinada por $f(A)$ y $f(B)$, es decir, sobre l_2 . Lo mismo ocurre con $F(P_2)$ y $F(P_3)$: todas sus particiones contienen el par $\{f(A), f(B)\}$, así que sus imágenes también pertenecen a l_2 .

En consecuencia, F envía los 5 puntos de l_1 en los 5 puntos de la recta l_2 . Obsérvese que un razonamiento análogo vale para F^{-1} , de modo que la incidencia en las secantes se preserva en ambos sentidos.

- Si $|l_1 \cap H_1| = 0$, es decir, l_1 es una recta externa a H_1 , consideramos un punto externo genérico $R \in X_1 \setminus H_1$. Las tres rectas secantes a H_1 que pasan por R determinan una partición única

$$\pi(R) = \{\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}\}$$

de H_1 en tres pares de puntos. Por construcción, $F(R)$ es el punto de $X_2 \setminus H_2$ cuya partición es

$$\pi(F(R)) = \{\{f(A), f(B)\}, \{f(C), f(D)\}, \{f(E), f(F)\}\}.$$

Sea ahora l_1 una recta externa a H_1 y sean $P, Q \in l_1$ dos puntos distintos. Primero observamos que las particiones $\pi(P)$ y $\pi(Q)$ no pueden compartir ningún par de puntos de H_1 . En efecto, si compartieran el par $\{A, B\}$, entonces existirían dos secantes a H_1 , una por P y otra por Q , que pasaran ambas por A y B . Como la recta que une A y B es única, esto implicaría que esa recta contiene a la vez a P y Q , por lo que l_1 sería secante a H_1 , en contradicción con que es externa. Por lo tanto, $\pi(P)$ y $\pi(Q)$ son particiones disjuntas.

Al aplicar f punto a punto, las particiones $\pi(F(P))$ y $\pi(F(Q))$ en H_2 tampoco comparten ningún par, pues sólo se han renombrado los puntos del hipérovalo.

Sea l' la recta que pasa por $F(P)$ y $F(Q)$ en el segundo plano. Supongamos, para obtener una contradicción, que l' es secante a H_2 y corta a H_2 en el par $\{A', B'\}$. Entonces, para el punto $F(P)$, la recta l' es una de sus secantes, de modo que el par $\{A', B'\}$ aparece en la partición $\pi(F(P))$. Lo mismo sucede para $F(Q)$, pues l' también pasa por $F(Q)$: el par $\{A', B'\}$ debe aparecer en $\pi(F(Q))$. Esto implicaría que $\pi(F(P))$ y $\pi(F(Q))$ comparten el par $\{A', B'\}$, lo cual contradice que dichas particiones son disjuntas.

En consecuencia, l' no puede ser secante a H_2 . En un plano proyectivo de orden 4 con un hipérovalo, toda recta corta al hipérovalo en 0 o 2 puntos; por lo tanto, si l' no es secante, debe ser externa. Así, la recta que une $F(P)$ y $F(Q)$ es externa a H_2 y se concluye que F envía rectas externas a rectas externas.

Hemos visto que F preserva la incidencia y es inyectiva, como X_1 y X_2 tienen el mismo número de puntos es biyectiva. Con esto, F induce una

correspondencia uno a uno entre los puntos de X_1 y los de X_2 que respeta la estructura de rectas, es decir, un isomorfismo de planos proyectivos.

Finalmente, sea P_{gen} un plano proyectivo genérico de orden 4. Por (PP3) existen en P_{gen} cuatro puntos no colineales y por el inciso 3 esto garantiza la existencia de un hipérovalo H_{gen} . Tomando una biyección $f : H_{\text{gen}} \rightarrow H$, donde H es un hipérovalo en $PG(2, 4)$ y extendiéndola a $F : P_{\text{gen}} \rightarrow PG(2, 4)$ como antes, obtenemos un isomorfismo entre P_{gen} y $PG(2, 4)$.

Por lo tanto, cualquier plano proyectivo de orden 4 es isomorfo a $PG(2, 4)$; es decir, salvo isomorfismo, sólo existe un plano proyectivo de orden 4. $\square$